Groupe A

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

I

Soit a un nombre réel strictement positif fixé.

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\Phi(x) = \int_0^a \frac{du}{(x^2 + u^2)^{1/4}}$$

1° Montrer que Φ est continue en $x = 0$.

2° Montrer que l'intégrale :

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{(t^2+1)^{1/4}} \right) dt$$

est convergente, et que sa somme est positive.

3° Soit $g : [0, a] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\Psi_g(x) = \int_0^a \frac{u\, g(u)}{(x^2 + u^2)^{1/4}}\, du$$

a. Montrer que pour $x \in [0, a]$ on a :

$$\left| \int_0^x \frac{u\, g(u)}{(x^2 + u^2)^{1/4}}\, du \right| \leqslant C\, x \sqrt{x}$$

où C est une constante que l'on précisera en fonction de g.

b. En utilisant l'inégalité :

$$(A + B)^{1/4} - A^{1/4} \leqslant \frac{1}{4} \frac{B}{A^{3/4}}$$

que l'on établira pour A et B strictement positifs, montrer que l'on a pour $x \in [0, a]$:

$$\left| \int_x^a \frac{u\, g(u)}{(x^2 + u^2)^{1/4}}\, du - \int_x^a g(u) \sqrt{u}\, du \right| \leqslant \frac{x}{4} \int_0^a \frac{|g(u)|}{\sqrt{u}}\, du$$

En conclure l'inégalité :

$$\limsup_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left| \frac{\Psi_g(x) - \Psi_g(0)}{x} \right| < \infty$$

4° Soit $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 vérifiant $f(0) > 0$. On pose pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\Phi_f(x) = \int_0^a \frac{f(u)}{(x^2 + u^2)^{1/4}}\, du$$

Montrer en utilisant les 2° et 3° que $\dfrac{\Phi_f(0) - \Phi_f(x)}{\sqrt{x}}$ a une limite strictement positive pour $x \to 0$, $x > 0$.

. . . / . . .

II

Soit ε un nombre réel strictement positif fixé :

1° Montrer que pour tout $\theta \in]0, \pi[$ il existe un unique nombre complexe z_θ tel que :

$$z_\theta^2 = 1 + \varepsilon^2 e^{i\theta}$$

$$\text{Im } z_\theta > 0$$

2° *a.* Montrer qu'on a $\text{Re } z_\theta > 0$ pour $\theta \in]0, \pi[$.

b. Montrer qu'on a $| z_\theta |^2 \geqslant \varepsilon^2 \sin \theta$ pour $\theta \in]0, \pi[$.

c. En déduire qu'on a pour tous θ, θ' de l'intervalle $]0, \pi[$

$$| z_\theta + z_{\theta'} |^2 \geqslant \varepsilon^2 \sin \theta$$

3° Soit φ l'application de $]0, \pi[$ dans $\mathbb{C}$ définie par $\varphi(\theta) = z_\theta$.

Utilisant l'égalité :

$$\varphi(\theta) - \varphi(\theta') = \varepsilon^2 \frac{e^{i\theta} - e^{i\theta'}}{\varphi(\theta) + \varphi(\theta')}$$

montrer que φ est continue, dérivable et de dérivée continue.

4° Calculer les limites pour $\theta \to 0$ et $\theta \to \pi$ de φ et de $\frac{d\varphi}{d\theta}$, en distinguant les cas $0 < \varepsilon < 1$, $\varepsilon > 1$ et $\varepsilon = 1$.

Dans ce dernier cas, préciser la limite de $\frac{z_\theta}{|z_\theta|}$ pour $\theta \to \pi$.

5° Déduire de ce qui précède que pour tout $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \neq 1$, l'ensemble $\Gamma_\varepsilon = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, | z^2 - 1 | = \varepsilon^2 \}$ est l'ensemble des points d'une courbe C^1 du plan. Examiner le cas $\varepsilon = 1$.

6° Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, Γ_ε est une partie compacte de $\mathbb{C}$, et que pour tout compact K de $\mathbb{C}$ il existe un nombre $\varepsilon(K) > 0$ tel que

$$\Gamma_\varepsilon \cap K = \varnothing \text{ si } \varepsilon > \varepsilon(K).$$

7° Montrer que la longueur de Γ_ε est donnée par :

$$\lg(\Gamma_\varepsilon) = 2\varepsilon^2 \int_0^\pi \frac{d\theta}{(1 + 2\varepsilon^2 \cos\theta + \varepsilon^4)^{1/4}}$$

III

Pour $\varepsilon \neq 1$ on pose :

$$F(\varepsilon) = \int_0^\pi \frac{d\theta}{(1 + 2\varepsilon^2 \cos\theta + \varepsilon^4)^{1/4}}$$

1° Montrer que F est de classe C^1 sur l'intervalle $]1, \infty[$, et strictement monotone sur cet intervalle.

2° Montrer que quand $\varepsilon \to \infty$ on a :

$$F(\varepsilon) = \frac{\pi}{\varepsilon} + 0\left(\frac{1}{\varepsilon^6}\right)$$

3° Montrer que pour tout $\alpha \in]0, \pi[$ on a convergence uniforme sur $[0, \pi - \alpha]$ des fonctions $f_\varepsilon(\theta) = (1 + 2\varepsilon^2 \cos\theta + \varepsilon^4)^{-1/4}$ lorsque $\varepsilon \to 1$, $\varepsilon < 1$. Préciser la limite.

4° Montrer que l'intégrale :

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(2 + 2\cos\theta)^{1/4}}$$

est convergente et qu'on a :

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 1 \\ \varepsilon < 1}} F(\varepsilon) = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(2 + 2\cos\theta)^{1/4}}$$

5° En posant $u = \cos\frac{\theta}{2}$ dans l'intégrale

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{d\theta}{(1 + 2\varepsilon^2\cos\theta + \varepsilon^4)^{1/4}}$$

et en utilisant le résultat de I 4°, montrer que le prolongement continu de F à $[1, \infty[$ a une dérivée à droite égale à $-\infty$ au point $\varepsilon = 1$.

6° Montrer que l'on a $F\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = \varepsilon F(\varepsilon)$ pour $\varepsilon > 1$. En déduire l'allure du graphe de la fonction $\varepsilon \to \lg(\Gamma_\varepsilon)$ près du point $\varepsilon = 1$.

7° Donner des arguments géométriques simples permettant de prévoir *a priori* des équivalents de $\lg(\Gamma_\varepsilon)$ pour $\varepsilon \to 0$ et $\varepsilon \to +\infty$.

IV

On considère l'application $\Phi :]0, \infty[\times]0, \pi[\to \mathbb{C}$ définie par $\Phi(\varepsilon, 0) = z_\theta(\varepsilon)$, où $z_\theta(\varepsilon)$ désigne l'unique nombre complexe tel que

$$z_\theta(\varepsilon)^2 = 1 + \varepsilon^2 e^{i\theta}, \quad \operatorname{Im} z_\theta(\varepsilon) > 0$$

(cf. II 1°).

1° Montrer que Φ est continue (cf. II 3°).

2° Montrer que Φ admet une dérivée partielle continue par rapport à ε. En déduire que Φ est de classe C^1 (on pourra utiliser II 3°). Calculer le jacobien de Φ.

3° Déduire du 2° que pour $0 < \varepsilon < 1$ l'aire de l'ouvert $\{z \in \mathbb{C} \mid |z^2 - 1| < \varepsilon^2\}$ est donnée par :

$$S(\varepsilon) = 2\int_0^{\varepsilon} \alpha^3\, d\alpha \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + 2\alpha^2\cos\theta + \alpha^4}}$$

4° Donner un équivalent de $S(\varepsilon)$ quand $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon > 0$.

5° Montrer que la fonction S est C^1 sur $[0, 1[$, et monotone croissante. En déduire qu'elle admet un prolongement continu à $[0, 1]$, que l'on notera $\hat{S}$ (on pourra donner un argument géométrique pour prouver l'existence de $\lim_{\substack{\varepsilon \to 1 \\ \varepsilon < 1}} S(\varepsilon)$).

6° Soit a un nombre réel strictement positif.

En s'inspirant de I montrer que pour toute fonction $f : [0, a] \to \mathbb{R}$, de classe C^1, telle que $f(0) > 0$, on a :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \int_0^a \frac{f(u)}{(x^2 + u^2)^{1/2}}\, du = +\infty$$

7° En déduire qu'on a :

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 1 \\ \varepsilon < 1}} \frac{dS}{d\varepsilon}(\varepsilon) = +\infty.$$